研究会報告

可積分性と解の展開

1989. Dec. 名大・理・物理　石井雅治

始める前に

単に現象としてではなくカオスをとらえるために、まず可積分性の考察から始めたい。もっともここではカオスのすぐ手前にある log を含む無限多価可積分性にまでしか近づくことができないが。

1．特異点回りの解の展開

系が可積分の場合、解はしばしば楕円関数になる。そこで動く特異点はすべて極であると要請することにより、たくさんの可積分系が発見された。[1)] この要請をみたす系は Painlevé property をもつといわれる。ここでは、このような特異点回りの展開及びその不可能性を通じて系の特性を探る。解の展開をみるために少し準備しよう。例を使う。

$$\Delta=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}y\\x^2\end{bmatrix}=0$$

とする。有理形の解をもつためには $\tau=t-t_0$, $x=\sum_{i=0} c_i\tau^{e_1+i}$, $y=\sum_{i=0} d_i\tau^{e_2+i}$,

とおいたとき τ の最低次が第１項と２項で釣り合う必要がある。$\Delta=0$ の場合、$[e_1, e_2]=[-2, -3]$, $[c_0, d_0]=[6,-12]$ とおけばよい。このような負の有理数 $[e_1, e_2]$ をドミナントという。また $L(t)=[c_0, d_0]\begin{bmatrix}\tau^{-2} & 0\\0 & \tau^{-3}\end{bmatrix}$

をドミナント曲線を呼ぶことにしよう。x，y を△に代入して τ のベキで整理すれば、

$$\Delta(x, y)=(\Delta_0+\Delta_1\tau+\Delta_2\tau^2+\cdots)\begin{bmatrix}\tau^{-2} & 0\\0 & \tau^{-3}\end{bmatrix}.$$

となる。ここに $\Delta_k(k\neq0)$ は

$$\Delta_k=\begin{bmatrix}-2+k & -1\\ 12 & -3+k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_k\\ d_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s_k^1(c_{k-1}, d_{k-1}, \cdots, c_0, d_0)\\ s_k^2(c_{k-1}, d_{k-1}, \cdots, c_0, d_0)\end{bmatrix}$$

である。

$$I(k)=\begin{bmatrix}-2+k, & -1\\ 12, & -3+k\end{bmatrix}$$

とおく。$\det I(k)\neq 0$ のときはいつでも帰納的に Δ_k を０にできるから、解の構成にとって $\det I(k)=0$ が問題になる。このような k をレゾナンスと呼ぶ。以上の準備のもとに問題が整理される。またこれ以後ドミナント及びドミナント曲線をもつ系だけを考える。

２．解の多価性とカオス

一般の場合にも τ の展開を代入、整理して $\Delta_k=I(k)c_k+s_k(c_{k-1}, \cdots, c_0)$, $c_k=(c_k^1, \cdots, c_k^n)$, $(k\neq 0)$ とできる。r をレゾナンスとすると、$\Delta=0$ の一般解は以下の場合に有理形でなくなる。

A．r が整数で、$\Delta_0=\Delta_1=\cdots=\Delta_{r-1}=0$ なる $c_0, \cdots, c_{r-1}$ の選択に対して、$s_r(c_{r-1}, \cdots, c_0)\notin \mathrm{Im}\, I(k)$ の場合。

B．r が整数でないとき。

Aの場合、Laurent 展開がいきづまって $\log\tau$ を含む展開が必要になり、Bの場合、任意定数がなくなってしまう。いづれの場合も一般解は多価あるいは無限多価になる。Lorenz 系など $\Delta(\varepsilon, x(\tau))=0$ のようにパラメーター ε をもつ系で、ε の変化により解が有理形でなくなるときカオス的にふるまう数値計算の例[2)]がある。また、あるクラスの非自励系で $\Delta(\varepsilon, x(t), t)=0$ が $\log t$ を含む展開をもつときメルニコフ関数が恒等的には０でなくなってしまうことが証明されている。[3)] 特異点回りで有理形の展開が不可能になるという事態をカオスは引き起こしているのか？ それは何

に起因するのだろうか？

3．可積分性と解の展開

この問いに消極的な方向から近づくのが以下の２つの定理である。

定理１（石井、1989）；△がA，Bをみなすなら△＝０は t_0 の回りでいくつかの任意定数を含む有理形ないしは Puisedux 級数形の解をもち、すべてのレゾナンスは整数になる。

A．△＝０は $t_0=\tilde{\Phi}+t$ 形でない x_k^{-1}，t の有理形第一積分をｎ－１個もつ。その第一積分はドミナント曲線Ｌを含む定義域をもつ。

B．Ｌの近傍で第一積分のτに関する最低次は独立である。

定理２（石井、1989）；△がAをみたすとき△＝０の解は Puisedux 展開できず、一般に $\log\tau$ を含む展開を要する。

A．△＝０は $\Phi=a+\sum_{i}^{i<\infty} P_i(\log c_1^i, \cdots, \log c_{m_i}^i)$ なる第一積分をもつ。

$P_i(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{m_i})$ は $Y_1, \cdots, Y_{m_i}$ に関する多項式、a，c_j^i は x_k^{-1}，t の有理形関数で $\frac{\partial a}{\partial x}(L)$ のτに関する最低次は０でない。

要約しよう。まず系が有理形の積分を十分もつなら解は Puisedux 展開できる。Painlevé property は定理１の特別な場合である。積分が log を含んで無限多価になる場合、一般に解も無限多価になることを定理２は示している。この場合レゾナンスが整数であることもいえる。しかし物理的な現象の場合、たいてい座標値は実数であり、適当に分岐をとれば第一積分中の log の多価性は表面化しない。解も一義的に決定可能でありカオスは起こらない。

4．結論

結局、特異点回りの展開が無限多価であるとしてもレゾナンスが整数であれば、それが直接カオスと結びつくわけではなく、積分の log 形無限多価性を反映している場合がありうる。つまり、解及び積分の無限多価性がカオスを生じる直接の原因ではないのである。

referance

1) A. Ramani, B. Grammaticos and T. Bountis, Physics Reports 180, No3 (1989) 159.

2) W.-H. Steeb and J.A. Louw, Chaos and Quantum Chaos, World Scientific (1986). 88

3) S.L. Ziglin, Trans. Moscow Math. Soc. 1 (1982) 283.